Aproximación asintótica y continuación analítica de series de potencias mediante una técnica heurística

Dan Mihai[1*], Iván González[1†]
[1]Universidad de Valparaíso
∗dan.mihai@alumnos.uv.cl, †ivan.gonzalez@uv.cl

Introducción

En este trabajo presentamos un procedimiento para hallar la continuación analítica o la expansión asintótica de funciones arbitrarias, las cuales tienen representaciones en serie que corresponden a funciones hipergeométricas. Para implementar este objetivo hemos utilizado una eficiente técnica denominada Método de Brackets (MoB) [1,2], la cual sin necesidad de integración permite hallar para cualquier serie o función hipergeométrica la correspondiente continuación analítica [3] o su aproximación asintótica.

Formalismo

Muchas de las funciones que pueden aparecer como soluciones de integrales o ecuaciones diferenciales suelen ser funciones cuya representación corresponde a una serie hipergeométrica, esto es:

$$f\left(x\right) = {}_pF_q\left(\begin{array}{c} a_1,...,a_p \\ b_1,...,b_q \end{array} \middle| x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(a_1\right)_n ... \left(a_p\right)_n}{\left(b_1\right)_n ... \left(b_q\right)_n} \frac{x^n}{n!}, \tag{1}$$

donde los índices $\{p,q\} \in (\mathbb{N} + \{0\})$, los parámetros $a_j \in \mathbb{C}$ $(j = 1,...,p)$ y $b_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1,...,q)$, el factor $\left(\beta\right)_n$ se denomina símbolo de Pochhammer y se define como: $\left(\beta\right)_n = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}$. Las condiciones de convergencia para estas series son conocidas y hay variada literatura al respecto. Ya sea para hallar la continuación analítica o la expansión asintótica de una serie de potencias $f\left(x\right)$, en ambos casos esta se representa como una combinación lineal de series de potencias de $\left(\frac{1}{x}\right)$. La gran ventaja de utilizar MoB para esta tarea es que los procedimientos de integración convencionales no son necesarios y el objetivo se cumple resolviendo sistemas de ecuaciones lineales. Se mostrará además que este procedimiento es extensible a series de potencias más generales, esto es, más allá de las funciones hipergeométricas.

Referencias

[1] I. Gonzalez and V. Moll, Definite integrals by method of brackets. Part 1, Advances in Applied Mathematics, Vol. 45, Issue 1, 50-73 (2010).

[2] I. Gonzalez, V. Moll and A. Straub, The method of brackets. Part 2: examples and applications, Contemporary Mathematics, Gems in Experimental Mathematics, Volume 517, 157-171 (2010).

[3] S. L. Skorokhodov. Method of analytic continuation of the generalized hypergeometric functions ${}_pF_{p-1}(a_1,...,a_p;b_1,...,b_{p-1};z)$. Comp. Math. and Math. Physics, 44:1102-1123 (2004).