El Método de Brackets y obtención de representaciones en serie de McLaurin de funciones singulares en cero

Benjamín Yapur[1*], Iván González[1†]
[1]Universidad de Valparaíso
∗benjamin.yapur@alumnos.uv.cl, †ivan.gonzalez@uv.cl

Introducción

Este trabajo se enfocará en la obtención de series de potencias "no convencionales"para funciones que formalmente no tienen expansión en serie en torno a cero, la necesidad de implementar este procedimiento surge porque el Método de Brackets (MoB) [1,2] es una técnica de integración cuyo fundamento es justamente reemplazar el integrando por su respectiva serie de McLaurin si es que existe. Se puede demostrar que utilizando MoB es posible asignar una serie de potencias tipo McLaurin a funciones que son divergentes en cero [3], dichas series solo resultan ser funcionales en el ámbito de integración con uso de MoB. Una característica esencial de estas series es que pueden ser de dos tipos posibles: Una representación en serie cuyo valor es cero o una representación cuyo valor es infinito.

Formalismo

La forma de hallar estas representaciones en serie "no convencionales"de funciones singulares en el origen es aplicar MoB directamente a la representación integral de dicha función. Un ejemplo interesante está referido a la función de Bessel Modificada de 2° tipo, la cual posee la siguiente representación integral $K_0\left(x\right)=\int_0^{\infty}\frac{\cos(xt)}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$ de la cual se obtienen las siguientes representaciones en serie de potencias:

- Representación en serie divergente: $K_0\left(x\right)=\frac{1}{2}\sum\limits_{n\geq 0}\phi_n\,\Gamma\left(\text{-}n\right)\left(\frac{x^2}{4}\right)^n$
- Representación en serie nula: $K_0\left(x\right)=\frac{1}{x}\sum\limits_{n\geq 0}\phi_n\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(-n)}\left(\frac{4}{x^2}\right)^n$

Ambas representaciones son útiles y funcionales para utilizarlas con MoB ya sea si $K_0\left(x\right)$ es parte del integrando como también si es parte de la solución de una integral. Se mostrarán ejemplos de otras funciones donde este procedimiento resulta ser útil.

Referencias

[1] I. Gonzalez and V. Moll, Definite integrals by method of brackets. Part 1, Advances in Applied Mathematics, Vol. 45, Issue 1, 50-73 (2010).

[2] I. Gonzalez, V. Moll and A. Straub, The method of brackets. Part 2: examples and applications, Contemporary Mathematics, Gems in Experimental Mathematics, Volume 517, 157-171 (2010).

[3] I. Gonzalez , K. Kohl , L. Jiu , V. H. Moll, An extension of the Method of Brackets. Part 1. Open Mathematics, Volume 15 (2017), Issue 1, 1181–1211.