

Modos cero de Majorana y efecto Kondo en un punto cuántico

G. A. Lara^{1*}, J. P. Ramos-Andrade^{1†}, D. Zambrano², P. A. Orellana²

¹Departamento de Física, Universidad de Antofagasta, Casilla 170, Antofagasta.

²Departamento de Física, Universidad Técnica Federico Santa María, Casilla 110 V, Valparaíso.

*gustavo.lara@uantof.cl, †juan.ramos@uantof.cl

Introducción

En este trabajo se muestra el transporte a través de un punto cuántico en régimen Kondo, acoplado a conductores normales y acoplado a superconductores topológicos unidimensionales que alojan modos cero de Majorana en sus extremos. El efecto Kondo en el punto cuántico se describe mediante una aproximación de campo medio para bosones auxiliares para una interacción de Coulomb U finita. Se usa el formalismo de funciones de Green fuera del equilibrio para calcular las densidades de estados del punto cuántico, las corrientes eléctricas y la conductancia diferencial, resueltas en espín, permitiendo caracterizar la interacción entre la resonancia de Kondo y los modos cero de Majorana. Los resultados revelan que la presencia de modos cero de Majorana modifica la resonancia de Kondo exhibiendo una estructura de antirresonancia en la densidad de estados. El comportamiento de la corriente eléctrica y la conductancia diferencial se pueden interpretar como una fuga de los modos cero de Majorana desde los superconductores topológicos hacia el punto cuántico. Nuestros hallazgos podrían ayudar en la comprensión del comportamiento del efecto Kondo en su interacción con los modos cero de Majorana.

Desarrollo

El sistema bajo estudio está formado por un punto cuántico, QD, acoplado simultáneamente a dos conductores normales, NC, y a dos superconductores topológicos, TSC, que albergan modos cero de Majorana, MZM, en sus extremos. El montaje considerado se presenta en la Fig.1, donde se describen los diferentes componentes y los respectivos acoplamientos.

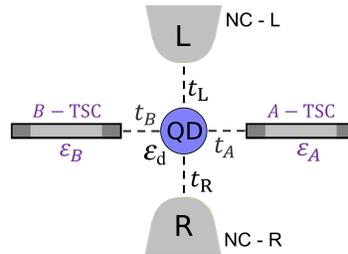


Figura 1: Esquema del sistema. QD con nivel de energía ϵ_d , acoplado a los conductores normales, L y R, mediante constantes t_L y t_R , respectivamente. Los dos TSC, A y B, están acoplados al QD mediante las constantes t_A y t_B , respectivamente.

Modelamos el sistema con un hamiltoniano de la forma $H = H_{l-d} + H_{s-d}$, donde el primer término describe a los NCs, al QD y sus acoplamientos, mientras que el segundo término describe los TSC, es decir, los MZM y los acoplamientos entre ellos y con el QD. Luego, el

primer término queda expresado por

$$H_{\text{l-d}} = \sum_{\alpha, \mathbf{k}_\alpha, \sigma} \left[\varepsilon_{\mathbf{k}_\alpha} \hat{n}_{\mathbf{k}_\alpha, \sigma} - t_\alpha \left(c_{\mathbf{k}_\alpha, \sigma}^\dagger f_{0\sigma} + f_{0\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}_\alpha, \sigma} \right) \right] + \sum_{\sigma} (\varepsilon_d + \sigma g \mu_B B) \hat{n}_{0\sigma} + U \hat{n}_{0\uparrow} \hat{n}_{0\downarrow}, \quad (1)$$

donde $\hat{n}_{\mathbf{k}_\alpha, \sigma} = c_{\mathbf{k}_\alpha, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}_\alpha, \sigma}$ y $\hat{n}_{0\sigma} = f_{0\sigma}^\dagger f_{0\sigma}$ son los operadores de número en el NC- α y en el QD, respectivamente, con $\sigma = +1$ or -1 denotando el espín electrónico \uparrow o \downarrow , respectivamente. El campo magnético aplicado corresponde a B , donde μ_B es el magnetón de Bohr y g es el factor de Landé.

Similarmente al modelo de Kitaev [1], los superconductores topológicos se reducen a una cadena de N sitios para la cual al inducir pareamiento entre sitios vecinos, solo quedan las cuasi-partículas MZM en los extremos (que son sus propias anti-cuasi-partículas), $\alpha_{\nu, N}$ y $\beta_{\nu, 1}$, que se tratan como una superposición de operadores fermionicos de Dirac usuales \tilde{c}_ν , siendo $\nu = A, B$, tal que

$$\tilde{c}_\nu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_{\nu, N} - i\beta_{\nu, 1}), \quad c_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_{\nu, N} + i\beta_{\nu, 1}) \quad (2)$$

y donde los MZM son

$$\alpha_{\nu, N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\theta_\nu} f_{\nu, N, \downarrow}^\dagger + e^{-i\theta_\nu} f_{\nu, N, \downarrow} \right), \quad \beta_{\nu, 1} = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(e^{i\theta_\nu} f_{\nu, 1, \downarrow}^\dagger - e^{-i\theta_\nu} f_{\nu, 1, \downarrow} \right). \quad (3)$$

Luego, el hamiltoniano $H_{\text{s-d}}$ está dado por

$$H_{\text{s-d}} = \sum_{\nu=A, B} \left[\varepsilon_\nu \tilde{c}_\nu^\dagger \tilde{c}_\nu + \left(\tilde{t}_\nu f_{0\downarrow}^\dagger + \tilde{t}_\nu^* f_{0\downarrow} \right) \left(\tilde{c}_\nu^\dagger - \tilde{c}_\nu \right) \right], \quad (4)$$

donde $\varepsilon_\nu \propto \exp(-L_\nu/\xi_\nu)$, siendo ξ_ν la longitud de coherencia superconductor, y $t_{nu} = |t_\nu| e^{i\theta_\nu}$, siendo $|t_\nu|$ la amplitud de acoplamiento entre el ν -TSC y el QD, y θ_ν la fase de los electrones en el ν -TSC. Dado que L_ν es la longitud del conductor, $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$ corresponde al límite de TSC largo y ε_ν finito corresponde al límite TSC corto.

Consideramos la interacción de Coulomb en el QD usando bosones auxiliares, siguiendo el enfoque similar la de Kotliar y Ruckenstein [2]. Entonces, dentro de la aproximación de campo medio (MFA), el hamiltoniano viene dado por

$$H_{\text{MFA}} = \sum_{\alpha, \mathbf{k}_\alpha, \sigma} \left\{ \varepsilon_{k_\alpha} \hat{n}_{\mathbf{k}_\alpha, \sigma} - \tilde{t}_{\alpha\sigma} \left(c_{k_\alpha, \sigma}^\dagger f_{0\sigma} + f_{0\sigma}^\dagger c_{k_\alpha, \sigma} \right) \right\} + \sum_{\sigma} \tilde{\varepsilon}_\sigma \hat{n}_{0\sigma} + \sum_{\nu} \varepsilon_\nu \tilde{c}_\nu^\dagger \tilde{c}_\nu + \sum_{\nu} \left(\tilde{t}_\nu f_{0\downarrow}^\dagger + \tilde{t}_\nu^* f_{0\downarrow} \right) \left(\tilde{c}_\nu^\dagger - \tilde{c}_\nu \right) + \lambda_0^{(1)} (e^2 + p_\uparrow^2 + p_\downarrow^2 + d^2 - 1) - \sum_{\sigma} \lambda_{0\sigma}^{(2)} (p_\sigma^2 + d^2) + U d^2, \quad (5)$$

donde $\tilde{t}_{\alpha\sigma} = t_\alpha Z_\sigma$, $\tilde{t}_\nu = t_\nu Z_\downarrow$, y $\tilde{\varepsilon}_\sigma = \varepsilon_d + \sigma g \mu_B B + \lambda_{0\sigma}^{(2)}$. Los parámetros e , d , p_σ , $\lambda_0^{(1)}$, y $\lambda_{0\sigma}^{(2)}$, se determinan minimizando la energía del estado fundamental del hamiltoniano H_{MFA} .

Empleando el formalismo de las funciones de Green de Keldysh para estados estacionarios fuera del equilibrio, se obtiene para la densidad de estados en el QD

$$\rho_{0\uparrow}(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_{T\uparrow}}{(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_{\uparrow})^2 + \Gamma_{T\uparrow}^2}, \quad (6)$$

y para espín $\sigma = \downarrow$ es un promedio de dos lorentzianas, dada por

$$\rho_{0\downarrow}(\varepsilon) = \frac{\Gamma_{T\downarrow}}{2\pi} \left(\frac{1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_{\downarrow}}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\downarrow}^2 + |\tilde{R}_1|^2}}}{(\varepsilon - E_+)^2 + \Gamma_{T\downarrow}^2} + \frac{1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\downarrow}}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\downarrow}^2 + |\tilde{R}_1|^2}}}{(\varepsilon - E_-)^2 + \Gamma_{T\downarrow}^2} \right), \quad (7)$$

donde

$$E_{\pm} = R_0 \pm \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\downarrow}^2 + |R_1|^2}, \quad R_n = \sum_{\nu} |\tilde{t}_{\nu}|^2 e^{-n2i\theta_{\nu}} \mathcal{P} \left\{ \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_{\nu}} + \frac{1}{\varepsilon + \varepsilon_{\nu}} \right\}.$$

Con un comportamiento tal que cuando $\varepsilon \rightarrow \pm\varepsilon_{\nu}$, una de las lorentzianas queda centrada en cero y la otra en $\pm\infty$, reduciéndose la densidad de estados a

$$\rho_{0\downarrow}(\pm\varepsilon_{\nu}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_{T\downarrow}}{\varepsilon_{\nu}^2 + \Gamma_{T\downarrow}^2}. \quad (8)$$

De esta ecuación es interesante observar la emergencia del factor 1/2 como una consecuencia directa del comportamiento tipo “medio fermión” de los MZMs acoplados al QD.

La corriente eléctrica para cada espín, debida a un voltaje V , está dada por

$$I_{\uparrow} = \frac{e}{h} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \Delta f \frac{\Gamma_{T\uparrow}^2}{(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_{\uparrow})^2 + \Gamma_{T\uparrow}^2}, \quad (9)$$

y

$$I_{\downarrow} = \frac{e}{h} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \Delta f \frac{\Gamma_{T\downarrow}^2 \left[(\varepsilon - R_0 + \tilde{\varepsilon}_{\downarrow})^2 + \Gamma_{T\downarrow}^2 + |R_1|^2 \right]}{\left| (\varepsilon - E_+ - i\Gamma_{T\downarrow}) (\varepsilon - E_- - i\Gamma_{T\downarrow}) \right|^2}, \quad (10)$$

donde $\Delta f = [f(\varepsilon - eV/2) - f(\varepsilon + eV/2)]$.

Resultados

Realizamos todos los cálculos utilizando parámetros de acoplamiento simétricos, $\Gamma = \Gamma_L = \Gamma_R$, con una banda ancha $W = 2 \cdot 10^3 \Gamma$, y una temperatura lo suficientemente baja $k_B T = 10^{-9} \Gamma$. Para considerar el régimen Kondo, observamos la existencia de un pico de resonancia cerca del nivel de Fermi con su semiancho asociado con la temperatura de Kondo respectiva. En nuestro sistema con su conjunto respectivo de parámetros, la temperatura de Kondo (T_K) se estima aproximadamente como $k_B T_K \simeq 0,009\Gamma$. En las realizaciones físicas del modelo de Kitaev [1], está presente un campo magnético B , el cual lo consideramos mediante la energía de Zeeman

$g\mu_B B = 1 \cdot 10^{-4}\Gamma$. Además, dado que el nivel de energía del QD se puede controlar mediante un voltaje de puerta, usamos $\varepsilon_d = V_g$, donde V_g es el voltaje de la puerta aplicada.

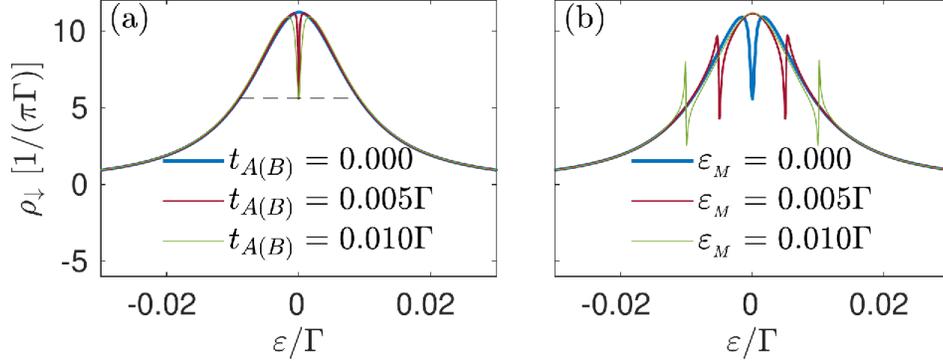


Figura 2: LDOS en el QD, ρ_{\downarrow} . $U = -10V_g$, $V_g = -10\Gamma$, $\theta_A - \theta_B = 0$. Panel a: $\varepsilon_M = 0$; $t_{A(B)} = 0$ (azul), $t_{A(B)} = 0,005\Gamma$ (rojo), $t_{A(B)} = 0,010\Gamma$ (verde). Ancho a media altura (línea a trazos) corresponde a $0,009\Gamma$. Panel b: $t_{A(B)} = 0,010\Gamma$; $\varepsilon_M = 0$ (azul), $\varepsilon_M = 0,005\Gamma$ (rojo), $\varepsilon_M = 0,010\Gamma$ (verde).

En la Figura 2, se presenta la densidad local de estados del QD para el componente de espín $\sigma = \downarrow$ como una función de la energía. En el panel de la izquierda (a), se considera a ambos TSC en el límite de TSC largo ($\varepsilon_M = 0$). Para $t_{A(B)} = 0$ (azul), el QD está aislado y luego se observa una resonancia alrededor del punto de energía cero, de acuerdo con el régimen Kondo del sistema. Siempre que $t_{A(B)} \neq 0$ (rojo y verde), la resonancia se ve afectada por la conexión a los MZM, ya que un perfil de interferencia muestra una depresión de ancho $\propto t_{A(B)}^2$. En el panel de la derecha (b), usamos un $t_{A(B)} = 0,01\Gamma$ fijo, y se considera el límite de TSC corto. Observamos que la depresión en cero para el límite de TSC largo (azul), se divide en dos líneas tipo Fano ubicadas en energías $\pm\varepsilon_M$ (rojo y verde). La densidad local de estados del QD para espín $\sigma = \uparrow$ no se ve afectada en absoluto por el acoplamiento de los MZM. El comportamiento en cuanto a la energía, en este caso, corresponde a una forma de línea lorentziana según la Ec. (6) y es similar al presentado para la componente de espín $\sigma = \downarrow$ para $t_{A(B)} = 0$. En este punto, para este caso de acoplamiento simétrico, es claro que el acoplamiento de MZM, ya sea en el límite de TSC largo o corto, influye en la resonancia de Kondo mediante fenómenos de interferencia entre ellos. Llama la atención como el pico central se suprime hasta la mitad del valor máximo para el límite de hilo largo, mientras que en el límite de hilo corto se restablece el valor máximo central, dando lugar a resonancias laterales de Fano que alcanzan un mínimo en $\pm\varepsilon_M$, que corresponde al valor medio de la forma lorentziana a esa energía, como se puede ver analíticamente a partir de la expresión dada en Eq. (8). Cabe mencionar que como ambos TSCs tienen la misma fase ($\theta_{A(B)} = 0$), no interfieren destructivamente, por lo que es posible interpretar que se comportan como un solo TSC efectivo, con una fuerza de acoplamiento efectiva como $t_{\text{eff}}^2 \propto t_A^2 + t_B^2$.

Otras magnitudes físicas medibles, como la corriente, pueden darnos información adicional sobre el acoplamiento entre los MZM y los QD. En la Figura 3 presentamos la corriente (paneles a y c) y la conductancia diferencial a través del QD como funciones del voltaje (paneles b y d). Para espín $\sigma = \uparrow$, la corriente exhibe un comportamiento de pendiente uniforme y, como

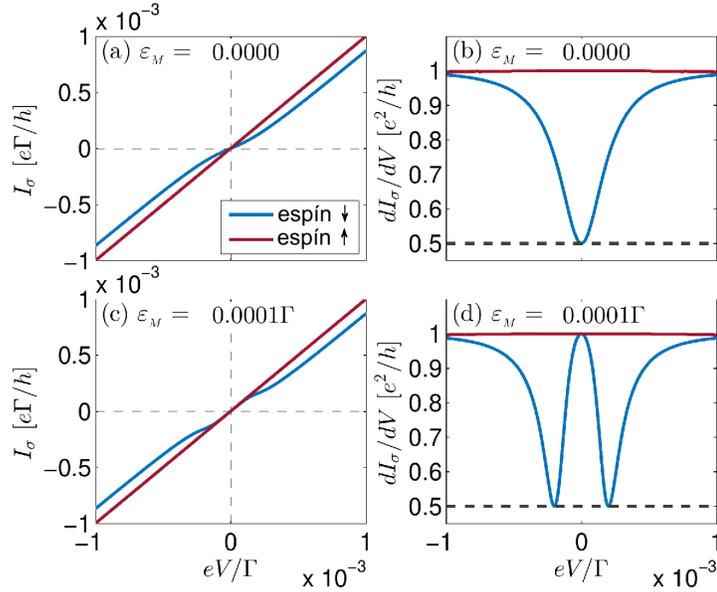


Figura 3: Spin dependent current I_σ and differential conductance dI_σ/dV as a function of the bias voltage V for fixed $U = -10V_g$, $V_g = -10\Gamma$, $t_{A(B)} = 0,005\Gamma$ and $\theta_A = \theta_B = 0$. Panels (a)-(b) are for $\varepsilon_M = 0$; and panels (c)-(d) are for $\varepsilon_M = 0,0001\Gamma$. The dashed black lines in the right panels represent the half-integer conductance. Panel (e) displays the zero-bias differential conductance as a function of ε_M for spin $\sigma = \downarrow$. The fit parameters are: $a = 0,5032$, $b = 0,4932$ and $c = 2,1420 \times 10^{-5}$.

consecuencia, la conductancia diferencial se observa constante, independiente de los valores de ε_M (líneas rojas). Por otro lado, el caso de spin $\sigma = \downarrow$ se presenta en líneas azules. En los paneles (a) y (b), se aborda el límite de TSC largo ($\varepsilon_M = 0$). En este límite, centrándonos en la región $eV \geq 0$, la pendiente de la corriente aumenta a medida que aumenta el voltaje, alcanzando la pendiente de espín $\sigma = \uparrow$ (análogamente para la región $eV \leq 0$). Luego, se obtiene una conductancia diferencial semientera con voltaje cero. Esta es una consecuencia directa de la fuga de MZM en el QD, como se describió anteriormente para el caso único de TSC en el caso de no interacción [3,4] o en el caso de interacción [5]. Por lo tanto, la firma de fuga de los MZM se observa de manera sólida incluso en la interacción con la resonancia de Kondo.

Por otro lado, dentro del límite de TSC corto, la corriente muestra que su pendiente se aleja del valor a voltaje cero [panel (c)], exhibiendo una conductancia de semi entero para los voltajes $eV = \pm\varepsilon_M$, volviendo a la conductancia máxima para voltajes superiores [panel (d)].

Ahora abordamos el papel de la diferencia de fase entre ambos TSC, que podría controlarse mediante un flujo externo [6]. En la Figura 4 mostramos la densidad local de estados del QD ρ_\downarrow y la conductancia diferencial dI_\downarrow/dV . Los paneles de la izquierda son para $\varepsilon_A = \varepsilon_B$, mientras que los paneles de la derecha son para $\varepsilon_A \neq \varepsilon_B$ ($\varepsilon_B = 2\varepsilon_A$). De los paneles (a) y (b) se observa una resonancia central en ρ_\downarrow , observándose con un ancho proporcional a $\varepsilon_A + \varepsilon_B$. Por otro lado, siempre que $\Delta\theta \neq n\pi$, se observan anti-resonancias laterales en el panel (a) debido a los fenómenos de interferencia destructiva, mientras que $\Delta\theta$ dependientes de las formas de Fano-line laterales se observan en el panel (b). Para el caso de acoplamiento simétrico que se muestra en el panel (c) [y el panel (e)], estas características conducen a la obtención de una con-

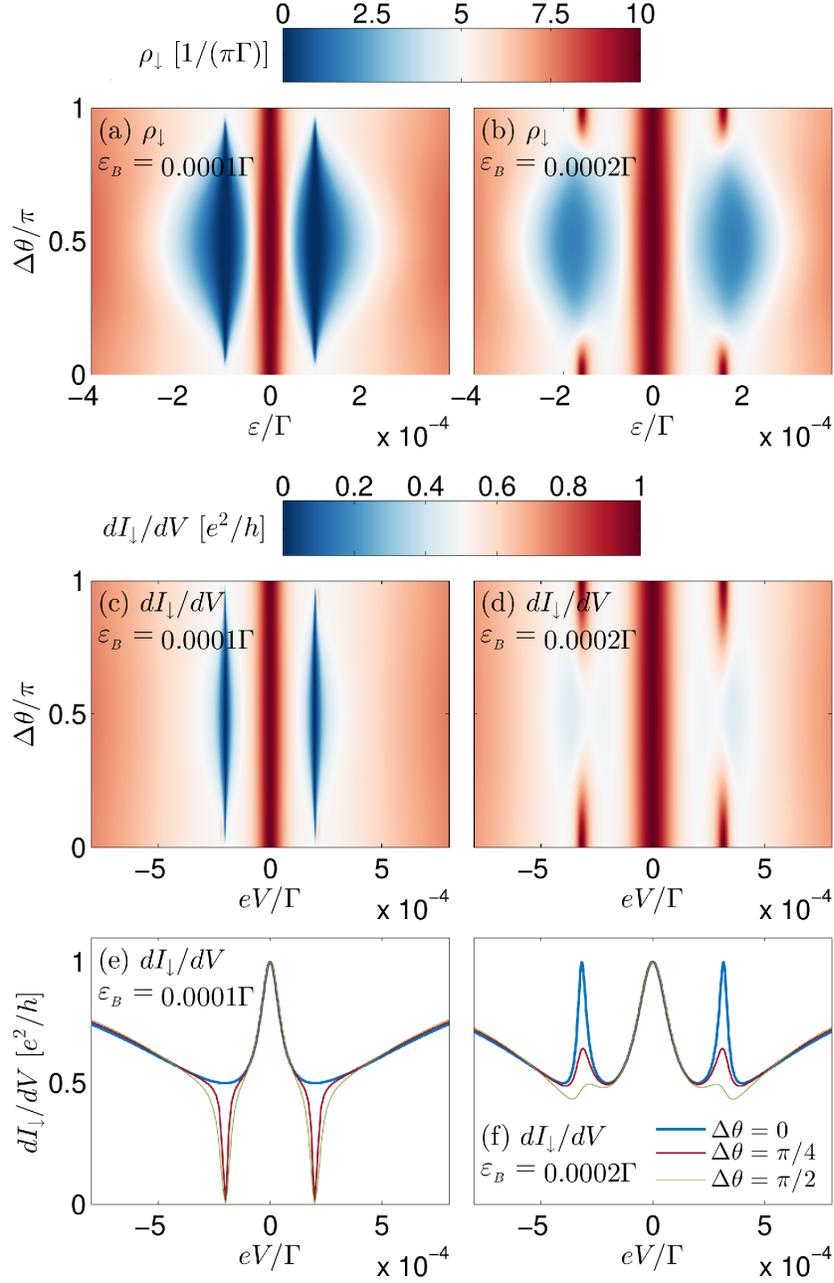


Figure 4: Panels (a) and (b): QD's local density of states for spin $\sigma = \downarrow$ as a function of the energy and the phase difference. Panels (c) and (d): differential conductance dI_{\downarrow}/dV as a function of the bias-voltage and the phase difference. For all panels we have $V_g = -10\Gamma$, $U = -10V_g$, $t_{A(B)} = 0,01\Gamma$ and $\varepsilon_A = 0,0001\Gamma$. For panels (a), (c) and (e) we use $\varepsilon_B = 0,0001\Gamma$ and for panels (b), (d) and (f) we use $\varepsilon_B = 0,0002\Gamma$. On panels (e) and (f) three particular cases of panels (c) and (d) are shown, for $\Delta\theta = 0, \pi/4$ and $\pi/2$.

ductancia diferencial semientera para $\Delta\theta = n\pi$, y una conductancia diferencial nula para otros valores de fase, ambos a energías laterales. En el caso de acoplamiento no simétrico ($\varepsilon_A \neq \varepsilon_B$) que se muestra en el panel (d) [y el panel (f)], se observan resonancias simétricas laterales para $\Delta\theta = n\pi$, y se obtienen formas de Fano-líneas moduladas para otros valores de $\Delta\theta$. En todos los casos estudiados, la evolución de las resonancias respecto al desfase puede interpretarse y describirse análogamente como el efecto Fano-Majorana para el caso de no interacción [7]. De este último, se destaca cómo el comportamiento de los fenómenos de interferencia es robusto en presencia de correlaciones electrónicas.

Conclusiones

Estudiamos un sistema formado por un QD en el régimen Kondo, acoplado a dos TSC, cada uno de los cuales aloja MZM en sus extremos. Obtuvimos la corriente y la conductancia diferencial a través del QD utilizando el formalismo de funciones de Green de Keldysh para caracterizar la interacción entre el efecto Kondo y los MZM. Los resultados obtenidos para el espín $\sigma = \downarrow$ en el límite TSC largo muestran que la firma de la presencia de MZM, es decir, la conductancia diferencial semientera, prevalece sobre las firmas atribuidas al efecto Kondo a energía cero para ambos TSC conectados con la diferencia de fase $\Delta\theta = n\pi$, siendo n un número entero. Para otros valores de fase, aparece interferencia destructiva. En consecuencia, tanto la densidad local de estados del QD como la conductancia diferencial se desvanecen en el punto exacto de energía cero. Siempre que uno de los TSC conectados esté dentro del límite de TSC corto, se obtiene la conductancia semientera de polarización cero independientemente de la diferencia de fase. Esta característica también está presente para otros valores de polarización específicos relacionados con las energías de acoplamiento entre MZM. Usando ambos TSC en el límite de TSC corto, los fenómenos de inferencia dependientes de la diferencia de fase emergen como formas de líneas de Fano sobre el perfil de resonancia de Kondo. El acoplamiento de los MZM no influye en las cantidades investigadas para el espín $\sigma = \uparrow$. Por lo tanto, nuestros hallazgos podrían interpretarse como un efecto Kondo resuelto por espín debido a la conexión de MZM, cuyas características deberían ser adecuadas para acceder y medir en experimentos.

Agradecimientos: J.P.R.-A. agradece el financiamiento de FONDECYT Postdoctorado N° 3190301 (2019). P. A. O. agradece el apoyo de FONDECYT N° 1180914 y N° 1201876.

Referencias

- [1] Kitaev, A. Y., Phys. Usp. **44**, 131 (2001)
- [2] Kotliar, G. y A. E. Ruckenstein, Phys. Rev. Lett. **57**, 1362 (1986)
- [3] Liu, D. E. y H. U. Baranger, Phys. Rev. B **84**, 201308(R) (2011).
- [4] Vernek, E., P. H. Penteado, A. C. Seridonio y J. C. Egues, Phys. Rev. B **89**, 165314 (2014).
- [5] Ruiz-Tijerina, D. A., E. Vernek, L. G. G. V. Dias da Silva y J. C. Egues, Phys. Rev. B **91**, 115435 (2015).
- [6] Zhou, T., M. C. Dartiailh, W. Mayer, J. E. Han, A. Matos-Abiague, J. Shabani y I. Žutić, Phys. Rev. Lett. **124**, 137001 (2020).
- [7] Ramos-Andrade, J. P., D. Zambrano y P. A. Orellana, Ann. Phys. (Berlin) **531**, 1800498 (2019).